HƯỚNG DẪN HỌC TRÒ TỰ HỌC MÔN TOÁN 10 – THÁNG 2 NĂM 2020 LẦN 2

BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa :

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề "$a > b$", "$a < b$", "$a \geq b$", "$a \leq b$" được gọi là những *bất đẳng thức*.

- Chứng minh bất đảng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng(mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứ biến thì "$A > B$" là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A > B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến "$A > B$" đúng với tất cả các giá trị của biến(thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A > B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất :

* $a > b$ và $b > c \Rightarrow a > c$

* $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

* $a > b$ và $c > d \Rightarrow a + c > b + d$

* Nếu $c > 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

Nếu $c < 0$ thì $a > b \Leftrightarrow ac < bc$

* $a > b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$

* $a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

* $a > b \geq 0 \Rightarrow a^n > b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

* $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi số thực a .

* $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (Với $a > 0$)

* $|x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right.$ (Với $a > 0$)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) Đối với hai số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0$, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b$

Hệ quả :

* Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau

* Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, ta có $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍCH CHẤT CƠ BẢN.**

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

b) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq (a+b+c)^2$

d) $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$

Lời giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) BĐT tương đương $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

d) BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a,b,c,d,e. Chứng minh rằng

$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e)$.

Lời giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e) =$

$$= (\frac{a^2}{4}-ab+b^2)+(\frac{a^2}{4}-ac+c^2)+(\frac{a^2}{4}-ad+d^2)+(\frac{a^2}{4}-ae+e^2)$$

$$= (\frac{a}{2}-b)^2+(\frac{a}{2}-c)^2+(\frac{a}{2}-d)^2+(\frac{a}{2}-e)^2 \ge 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \ge 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \ge \frac{2}{1+ab}$.

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4+3 \ge 4x$ b) $x^4+5 > x^2+4x$ c) $x^{12}+x^4+1 > x^9+x$

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4+b^4-4ab+2 \ge 0$

b) $2(a^4+1)+(b^2+1)^2 \ge 2(ab+1)^2$

c) $3(a^2+b^2)-ab+4 \ge 2(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1})$

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

- **DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY(côsi) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRI LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.**

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

* Điều kiện xảy ra dấu ‘=’ là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2+y^2\geq 2xy;\quad x^2+y^2\geq \dfrac{(x+y)^2}{2};\quad xy\leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

Đối với ba số: $abc\leq \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $abc\leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a,b là số dương thỏa mãn $a^2+b^2=2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\geq 4$ b) $a+b\ ^{5}\geq 16ab\sqrt{1+a^2\quad 1+b^2}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}}=2,\ \dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}.\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\geq \dfrac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2=a^2+b^2\geq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\Rightarrow ab\leq 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\geq 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Ta có $(a+b)^5 = (a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+2ab+b^2 \geq 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)} = 4\sqrt{ab}$ và

$(a^3+3ab^2)+(3a^2b+b^3) \geq 2\sqrt{(a^3+3ab^2)(3a^2b+b^3)} = 4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$

Suy ra $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3) \geq 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5 \geq 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8$

b) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab} \leq a^3+b^3+c^3$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}},\ b+\frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{c}},\ c+\frac{1}{a} \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$

Suy ra $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geq 8\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}} = 8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1+a^2 \geq 2\sqrt{a^2} = 2a$, tương tự ta có $1+b^2 \geq 2b,\ 1+c^2 \geq 2c$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 2(a^2b+b^2c+c^2a)$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b + b^2c + c^2a \ge 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a} = 3abc$

Suy ra $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \ge 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

c) Ta có $(1+a)(1+b)(1+c) = 1+\ ab+bc+ca\ +\ a+b+c\ +abc$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$ab+bc+ca \ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3\ \sqrt[3]{abc}^{\,2}$ và $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c) \ge 1+3\ \sqrt[3]{abc}^{\,2} + 3\sqrt[3]{abc} + abc = \ 1+\sqrt[3]{abc}^{\,3}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$a^2\sqrt{bc} \le a^2\left(\dfrac{b+c}{2}\right),\ b^2\sqrt{ac} \le b^2\left(\dfrac{a+c}{2}\right),\ c^2\sqrt{ab} \le c^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

Suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le \dfrac{a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b}{2}$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b \le \dfrac{a^3+a^3+b^3}{3},\ b^2a \le \dfrac{b^3+b^3+a^3}{3},\ a^2c \le \dfrac{a^3+a^3+c^3}{3},$

$c^2a \le \dfrac{c^3+c^3+a^3}{3},\ b^2c \le \dfrac{b^3+b^3+c^3}{3},\ c^2b \le \dfrac{c^3+c^3+b^3}{3}$

Suy ra $a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b \le 2\ \ a^3+b^3+c^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le a^3+b^3+c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$

b) $\left(\dfrac{a}{b^3} + \dfrac{b}{c^3} + \dfrac{c}{d^3} + \dfrac{d}{a^3}\right)\ a+b\ \ b+c\ \ge 16$

c) $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}+\dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 4.$

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\leq 3$

b) $\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}\leq\dfrac{3}{4}$

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x+y+z\geq a+b+c$ (hoặc $xyz\geq abc$), ta thường đi chứng minh $x+y\geq 2a$ (hoặc $ab\leq x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\geq a+b+c$

b) $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{c}{a^2}\geq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}}=2b$

Tương tự ta có $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\geq 2c,\ \dfrac{ac}{b}+\dfrac{ba}{c}\geq 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$2\left(\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\right)\geq 2\ \ a+b+c\ \ \Leftrightarrow\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\geq a+b+c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{b^2}.\dfrac{1}{a}}=\dfrac{2}{b}$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{c^2}+\dfrac{1}{b}\geq\dfrac{2}{c},\ \dfrac{c}{a^2}+\dfrac{1}{c}\geq\dfrac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\Leftrightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$

b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c}.\frac{b^3c^3}{a}}=2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 2abc^3$, $\frac{c^3a^3}{b}+\frac{a^3b^3}{c}\ge 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\right)\ge 2abc\ \ a^2+b^2+c^2$

$\Leftrightarrow\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\ \ a^2+b^2+c^2\ \ \ge 9\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2.\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 2c^2$, $\left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\ge 2\mathrm{a}^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\geq 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

HỌC TRÒ TỰ GIẢI CÁC VÍ DỤ SAU

Ví dụ 7: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $8\ \ a+b\ \ \ b+c\ \ \ c+a\ \ \leq\ \ 3+a\ \ \ 3+b\ \ \ 3+c$

b) $\ 3-2a\ \ \ 3-2b\ \ \ 3-2c\ \ \leq abc$

Ví dụ 8: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$.

Ví dụ 9: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}\geq\frac{3}{2}$

Ví dụ 10: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\geq 2\ \ a+b+c$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 11: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$A=\ \ 1+2a\ \ \ 1+2bc$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2\geq 2ma\Rightarrow 2a\leq\frac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b, c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = c$ nên ta đánh giá $2bc \le b^2 + c^2$.

Suy ra $A \le \left(\frac{a^2}{m} + m + 1\right)\ 1 + b^2 + c^2\ = B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng

$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B = \frac{1}{m}\ a^2 + m^2 + m\quad 1 + b^2 + c^2\ \le \frac{1}{m}\left(\frac{a^2 + m^2 + m\ +\ 1 + b^2 + c^2}{2}\right)^2$$

Suy ra $\mathrm{A} \le \frac{1}{4m}\ m^2 + m + 2\ ^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a = m,\ b = c, a^2 + m^2 + m = 1 + b^2 + c^2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Từ đây ta có $m = \frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2 + \frac{4}{9} \ge \frac{4}{3}a \Rightarrow 2a \le \frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3}$ và $2bc \le b^2 + c^2$

Suy ra $A \le \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)\ b^2 + c^2 + 1$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2}{3} + 1\right)\ b^2 + c^2 + 1\ = \frac{3}{2}\left(a^2 + \frac{10}{9}\right)\ b^2 + c^2 + 1\ \le \frac{3}{2}\left(\frac{a^2 + \frac{10}{9} + b^2 + c^2 + 1}{2}\right)^2 = \frac{98}{27}$$

Suy ra $\mathrm{A} \le \frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c \\ a^2 + \frac{10}{9} = b^2 + c^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = c = \sqrt{\frac{5}{18}} \end{cases}$

Vậy $\max A = \frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a = \frac{2}{3}$ và $b = c = \sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 12: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a+4b+3c^2=68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2+c^3$.

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

➢ **DẠNG 4: ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC.**

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x=f\left(a,b,c\right),\ y=g\left(a,b,c\right),\ z=h\left(a,b,c\right)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t=f\left(a;b;c\right)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho các số dương $a,b,c.$

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{6b+8c}{2a+b}+\dfrac{3a+2b+c}{b+c}\ge 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+4\text{a}}+\dfrac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

a) Đặt $x=a+b+c,\ y=2a+b,\ z=b+c$

Suy ra $a=x-z,\ b=-2x+y+2z,\ c=2x-y-z$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{-x+y+z}{x}+\dfrac{4x-2y+4z}{y}+\dfrac{x+y}{z}\ge 7$

$$\Leftrightarrow -1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4x}{y}-2+\frac{4z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\ge 7$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{4\text{z}}{y}+\frac{y}{z}\right)\ge 10\ (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{x}+\dfrac{4x}{y}\ge 4,\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}\ge 2,\ \dfrac{4\text{z}}{y}+\dfrac{y}{z}\ge 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = z \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y = 2z$ suy ra không tồn tại a, b, c.

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x = a + b + c,\ y = b + c + 4a,\ z = c + a + 16b$

Suy ra $a = \dfrac{y - x}{3},\ b = \dfrac{z - x}{15},\ c = \dfrac{21x - 5y - z}{15}$

Khi đó ta có $P = \dfrac{-6x + 5y + z}{15x} + \dfrac{4x - y}{3y} + \dfrac{16x - z}{15z}$

$\Rightarrow P = \dfrac{y}{3x} + \dfrac{4x}{3y} + \dfrac{z}{15y} + \dfrac{16x}{15z} - \dfrac{4}{5}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{3x} + \dfrac{4x}{3y} \geq \dfrac{4}{3},\ \dfrac{z}{15y} + \dfrac{16y}{15z} \geq \dfrac{8}{15}$

Suy ra $P \geq \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{15} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 2y = z \Leftrightarrow a = \dfrac{5b}{3} = \dfrac{5c}{7}$

Vậy $\min P = \dfrac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a = \dfrac{5b}{3} = \dfrac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p - a} + \frac{b}{p - b} + \frac{c}{p - c} \geq \sqrt{\frac{b + c}{p - a}} + \sqrt{\frac{c + a}{p - b}} + \sqrt{\frac{a + b}{p - c}}$$

Lời giải

Đặt $x = p - a;\ y = p - b;\ z = p - c$ suy ra $a = y + z;\ b = z + x;\ c = x + y$.

Do a, b, c là ba cạnh của tam giác nên x, y, z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} + \frac{x + y}{z} \geq \sqrt{2 + \frac{y + z}{x}} + \sqrt{2 + \frac{z + x}{y}} + \sqrt{2 + \frac{x + y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2 + \dfrac{y + z}{x}} \leq \left(2 + \dfrac{y + z}{x}\right) + 4 = \dfrac{y + z}{x} + 6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2+\frac{z+x}{y}} \le \frac{z+x}{y}+6,\ 4\sqrt{2+\frac{x+y}{z}} \le \frac{x+y}{z}+6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\right) \le \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \ge \frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18\right)$

$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \ge 6$.

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} = \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y} \ge 2,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x} \ge 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \ge 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

Nhận xét : Đối với BĐT có giả thiết a,b,c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2},\ y=\frac{a-b+c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$ và x,y,z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x,y,z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

HỌC TRÒ TỰ GIẢI CÁC VÍ DỤ SAU

Ví dụ 3: Cho x,y,z là số dương. Chứng minh rằng $x^3+2y^3+3z^3 \ge \frac{1590}{1331}\ x+y+z\ ^3$

Ví dụ 4: Cho x,y,z là số dương thỏa mãn $x+y+z \le \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{15}{2}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Ví dụ 6: Cho $x,\ y,\ z$ dương thỏa mãn $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\frac{x^2+y^2+z^2+14xyz}{4\ \ x+y+z\ ^2+15xyz}$

- **DẠNG 5: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ.**

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\ge 0\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ (đúng với mọi $a>0,b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a\Leftrightarrow\frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc},\ \frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$

Tương tự : $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)}$; $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a,b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2+1\ge 3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le\ a+b\ ^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2+1\ge\frac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 0\Leftrightarrow(3a+3b+4)^2\ge 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-\frac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab\le 0$.

Xét $ab>0$. Áp dụng BĐT $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2=16ab\left[2ab(a^2+b^2)\right]^2\le 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2=\ a+b\ ^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2 \le (a+b)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2+b^2=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\dfrac{2a^3+a+1}{a^2}-2b$.

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 2 ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa bất phương trình một ẩn

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $\mathrm{D}=D_f\cap D_g$.
Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$, $f(x)\le g(x)$, $f(x)\ge g(x)$ được gọi là ***bất phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của bất phương trình.

$x_0\in D$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình $f(x)<g(x)$ nếu $f(x_0)<g(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm(hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

Chú ý : Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác đinh D của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x\in D$. Điều kiện đó gọi là điều kiện xác định của bất phương trình, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

2. Bất phương trình tương đương, biến đổi tương đương các bất phương trình.

a) Định nghĩa: Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là ***tương đương*** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Kí hiệu: Nếu $f_1(x)<g_1(x)$ tương đương với $f_2(x)<g_2(x)$ thì ta viết

$f_1(x)<g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)<g_2(x)$

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) Định lý và hệ quả:

Định lý 1: Cho bất phương trình $f(x)<g(x)$ có tập xác định D; $y=h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D. Khi đó trên D, Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình sau

1) $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$

2) $f\left(x\right).h\left(x\right) < g\left(x\right).h\left(x\right)$ nếu $h\left(x\right) > 0$ với mọi $x \in D$

3) $f\left(x\right).h\left(x\right) > g\left(x\right).h\left(x\right)$ nếu $h\left(x\right) < 0$ với mọi $x \in D$

Hệ quả: Cho bất phương trình $f\left(x\right) < g\left(x\right)$ có tập xác định D. Khi đó

1) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^3(x) < g^3(x)$

2) $f(x) < g(x) \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x)$ với $f(x) \geq 0,\ g(x) \geq 0$, $\forall x \in D$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- Đối với việc giải bất phương trình ta thường thực hiện phép biến đổi tương đương nên cần lưyu ý tới điều kiện để thực hiện phép biến đổi tương đương đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

➢ **DẠNG TOÁN 1: TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH.**

1. Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của bất phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f\left(x\right), g\left(x\right)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)

- Điều kiện để biểu thức

- $\sqrt{f\left(x\right)}$ xác định là $f\left(x\right) \geq 0$
- $\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ xác định là $f\left(x\right) \neq 0$
- $\dfrac{1}{\sqrt{f\left(x\right)}}$ xác định là $f\left(x\right) > 0$

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $x + \dfrac{5}{4x^2 - 9} < 1$ b) $\sqrt{4 - 2x} \geq \dfrac{x+1}{x^2 - 2x - 1}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $4x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{3}{2}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$$\begin{cases} 4-2x \ge 0 \\ x^2-2x-1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x \ne 1-\sqrt{2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x+\sqrt{x-3} \ge 2\sqrt{3-x}+3$ b) $\sqrt{-x^2+4x-4} \le 27-3x^3$

c) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} < \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+2$ d) $\sqrt{\ x-1\ ^{2}\ \ 3-4x\ }-5x > \sqrt{4x-3}-7$

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

- **DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG.**

1. Phương pháp giải.

Để giải bất phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về bất phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của bất phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương bất phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế của bất phương trình với một biểu thức *luôn dương*(hoặc *luôn âm*) và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được bất phương trình *cùng chiều* (hoặc *ngược chiều*) tương đương với bất phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của bất phương trình (hai vế luôn dương) ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.
- Lập phương hai vế của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$ (*) :

a) $3x+1-\dfrac{1}{x-3} > -\dfrac{1}{x-3}$ b) $3x+1+\dfrac{x}{\sqrt{3x+1}} > \dfrac{x}{\sqrt{3x+1}}$

Lời giải

Ta có $3x+1>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

a) $3x+1-\dfrac{1}{x-3} > -\dfrac{1}{x-3}$ (1) không tương đương $3x+1>0$ vì $x=3$ là nghiệm của bất phương trình (*) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

b) $3x+1+\dfrac{x}{\sqrt{3x+1}} > \dfrac{x}{\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow 3x+1>0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ tương đương $3x+1>0$.

Ví dụ 2: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\left|x^2+2x\right|+3\le 0$

b) $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}<2$

Lời giải

a) Ta có $\left|x^2+2x\right|\ge 0\Rightarrow\left|x^2+2x\right|+3>0$ do đó bất phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ: $x>0$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{x}}{x+1}+\frac{x+1}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}}}=2$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $\sqrt{|x-1|}+x^2\ge 2x-1$

b) $\frac{1}{x^2+1}-(x+1)^2\le\frac{1}{x^2+1}$

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

Ví dụ 4: Bạn Nam giải bất phương trình $|x+1|\ge x-1$ như sau

Bất phương trình tương đương với $(x+1)^2\ge(x-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1\ge x^2-2x+1\Leftrightarrow 4x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[0;+\infty)$.

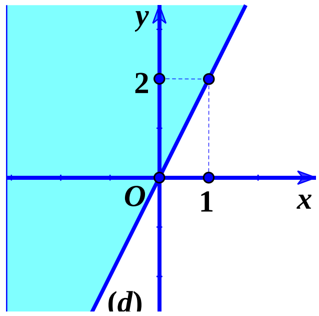
Theo em ban Nam giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

(HỌC TRÒ TỰ GIẢI)

- **DẠNG TOÁN 3: XÁC ĐỊNH MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.**

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

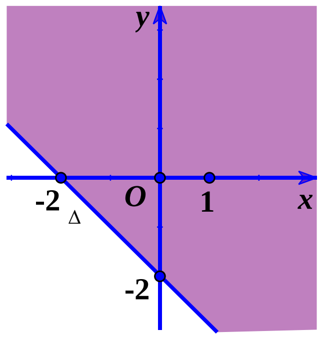
a) $2x-y\geq\ 0$ b) $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x+y+1}{3}$



Lời giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng (d): $2x-y=0$. Ta có (d) chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$. Ta thấy (1; 0) là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (*d*) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

b) Ta có $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x-y+1}{3}\Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0$



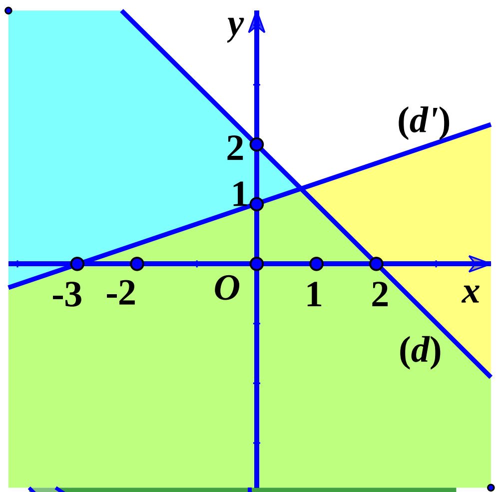
$\Leftrightarrow -x-4y-2>0\Leftrightarrow x+4y+2<0$

Trong mặt phẳng tọa độ , vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-2\geq 0\\ x-3y+3\leq 0\end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>0\\ 2x-3y+6>0\\ x-2y+1\geq 0\end{cases}$

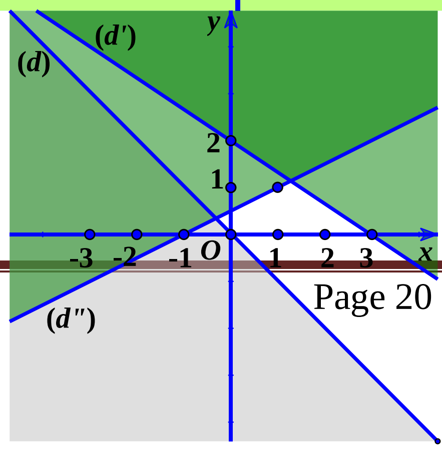


Lời giải

a) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y-2=0$, $(d'): x-3y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\geq 0$ và $x-3y+3\leq 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d) và (d').

b) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y=0$, $(d'): 2x-3y+6=0$ và $(d''): x-2y+1=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy



Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\geq 0$.

Xét điểm $M(1;0)$ ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+y>0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d'')

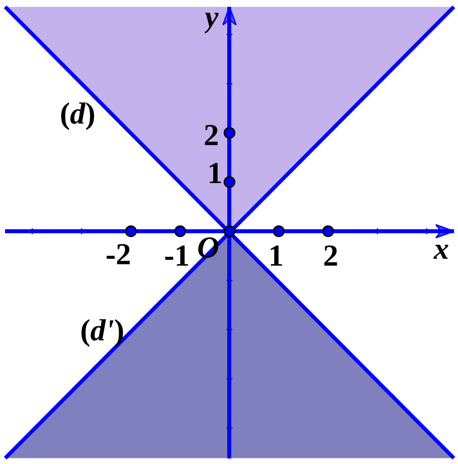
Ví dụ 3: Xác định miền nghiệm bất phương trình $(x-y)(x^3+y^3)\geq 0$.

Lời giải

Ta có $(x-y)(x^3+y^3)\geq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y)\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y\geq 0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x-y\leq 0 \\ x+y\leq 0 \end{cases}$ (2)

Như vậy miền nghiệm của bất phương trình đã cho là gồm hai miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) và (2).



Vẽ các đường thẳng $(d): x+y=0$, $(d'): x-y=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Xét điểm $M(1;0)$, ta có $(1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (1) do đó $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (1). Xét điểm $N(-1;0)$, ta có $(-1;0)$ là nghiệm của các bất phương trình của hệ (2) do đó $N(-1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình (2).

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng $(d), (d')$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 4.61: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x-3y\geq 0$ b) $\dfrac{x-y}{-2}<x+y+1$

Bài 4.62: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-2<0 \\ x-y+3\geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+2>0 \\ 2x-3y-6\leq 0 \\ x-2y+3\leq 0 \end{cases}$

- **DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ.**

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến ***quy hoạch tuyến tính***. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau "Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x;y)=ax+by\,(b\neq 0)$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác".

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Chi phí cho việc này là: $800.000x+4.000000y$ (đồng)

Mức chi này không được phép vượt qúa mức chi tối đa, tức:

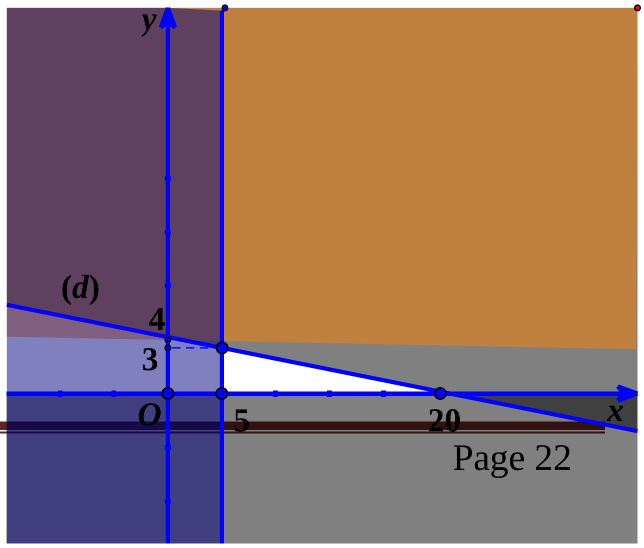
$800.000x+4.000.000y\leq 16.000.000$ hay $x + 5y - 20\leq 0$

Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có: $x\geq 5,\ y\leq 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x\geq 0,\ y\geq 0$. Hiệu quả chung của quảng cáo là: $x+6y$.

Bài toán trở thành: Xác định x, y sao cho:

$M(x;y)=x+6y$ đạt giá trị lớn nhất.



Với các điều kiện $\begin{cases} x+5y-20 \le 0 \\ x \ge 5 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ (*)

Trước tiên ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng $(d): x+5y-20=0$, $(d'): x=5$, $(d''): y=4$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng(tam giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $M(x;y)=x+6y$ đạt tại một trong các điểm $(5;3)$, $(5;0)$, $(20;0)$

Ta có $M(5;3)=23$, $M(5;0)=5$, $M(20;0)=20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi $x\,(x \ge 0)$ là số kg loại I cần sản xuất, $y\,(y \ge 0)$ là số kg loại II cần sản xuất.

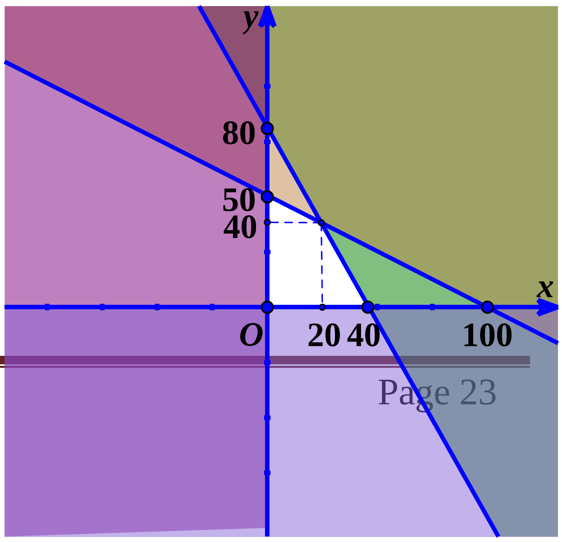
Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x+4y$, thời gian là $30x+15y$ có mức lời là $40000x+30000y$

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc suy ra $2x+4y \le 200$ hay $x+2y-100 \le 0$, $30x+15y \le 1200$ hay $2x+y-80 \le 0$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y thoả mãn hệ

$\begin{cases} x+2y-100 \le 0 \\ 2x+y-80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ (*) sao cho

$L(x;y)=40000x+30000y$ đạt giá trị lớn nhất.



Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng $(d): x+2y-100=0,\ (d'): 2x+y-80=0$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng(tứ giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $L(x;y)=40000x+30000y$ đạt tại một trong các điểm $(0;0),\ (40;0),\ (0;50),\ (20;40)$. Ta có $L(0;0)=0,\ L(40;0)=1600000,$ $L(0;50)=1500000,\ L(20;40)=2000000$ suy ra giá trị lớn nhất của $L(x;y)$ là 2000000 khi $(x;y)=(20;40)$.

Vậy cần sản xuất 20 kg sản phẩm loại I và 40 kg sản phẩm loại II để có mức lời lớn nhất.

2. Bài tập luyện tập.

Bài 4.63: Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

Bài 4.64: Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh Trăng muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường, 0,08kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường, 0,04kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng.

Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

Bài 4.65: Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau: Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm. Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

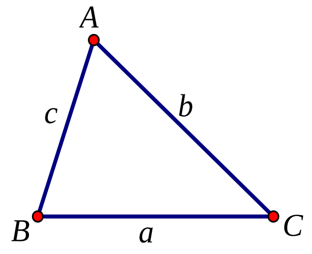
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

II.NỘI DUNG:

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định lí côsin: Trong tam giác ABC với $BC = a,\ AC = b$ và $AB = c$. Ta có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$



Hình 2.6

Hệ quả:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

2. Định lí sin : Trong tam giác ABC với $BC = a,\ AC = b$, $AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

3. Độ dài trung tuyến: Cho tam giác ABC với $m_a,\ m_b,\ m_c$ lần lượt là các trung tuyến kẻ từ A, B, C. Ta có :

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

4. Diện tích tam giác

Với tam giác ABC ta kí hiệu $h_a,\ h_b,\ h_c$ là độ dài đường cao lần lượt tương ứng với các cạnh BC, CA, AB; R, r

lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác; $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác; S là diện tích tam giác. Khi đó ta có:

S = $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

= $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

= $\frac{abc}{4R}$

= pr

= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê–rông)

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

✍ DẠNG 1: Xác định các yếu tố trong tam giác.

1. Phương pháp.

- Sử dụng định lí côsin và định lí sin
- Sử dụng công thức xác định độ dài đường trung tuyến và mối liên hệ của các yếu tố trong các công thức tính diện tích trong tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh BC, và độ dài đường cao kẻ từ A.

Lời giải

Áp dụng định lí côsin ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\frac{3}{5} = 29$

Suy ra $BC = \sqrt{29}$

Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.4.5.\frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2}.\sqrt{29}.h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^0,\ B = 45^0$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $C = 180^0 - A - B = 180^0 - 30^0 - 45^0 = 105^0$

Theo định lí sin ta có $a = 2R\sin A = 2.3.\sin 30^0 = 3$, $b = 2R\sin B = 2.3.\sin 45^0 = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R\sin C = 2.3.\sin 105^0 \approx 5{,}796$

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \frac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4} \approx \frac{2\left(18 + 5{,}796^2\right) - 9}{4} = 23{,}547$

Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow r = \frac{bc\sin A}{2p} \approx \frac{3\sqrt{2}.5{,}796\sin 30^0}{3 + 3\sqrt{2} + 5{,}796} \approx 0{,}943$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Biết $AB = 3,\ BC = 8,\ \cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.

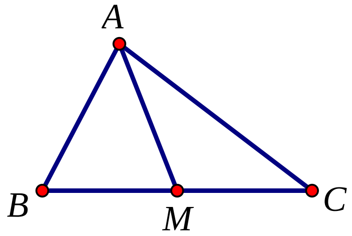
Lời giải (hình 2.7)

$BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí côsin ta có

$$\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.AB}$$

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{2.4.x}$



Hình 2.7

$$\Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{13} \\ x = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có

$$AM^2 = \frac{2\ \ AB^2 + AC^2\ \ - BC^2}{2AB.AC}$$

TH1: Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \dfrac{2\ \ 3^2 + AC^2\ \ - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$.

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + 49 - 64}{2.3.7} = -\frac{1}{7}$$

Suy ra $A \approx 98^0 12'$

TH2: Nếu $x = \dfrac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \dfrac{49}{13} = \dfrac{2\ \ 3^2 + AC^2\ \ - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\dfrac{397}{13}}$

Ta có $BC > AC > AB \Rightarrow$ góc A lớn nhất. Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{9 + \dfrac{397}{13} - 64}{2.3.\sqrt{\dfrac{397}{13}}} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$$

Suy ra $A \approx 137^0 32'$

Ví dụ 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$ biết $AD = 1$. Giả sử E là trung điểm AB và thỏa mãn $\sin BDE = \dfrac{1}{3}$.

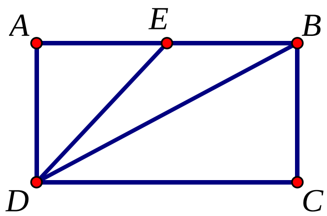
Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải (hình 2.8)

Đặt $AB = 2x\ \ x > 0\ \Rightarrow AE = EB = x$.

Vì góc BDE nhọn nên $\cos BDE > 0$ suy ra

$$\cos BDE = \sqrt{1 - \sin^2 BDE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



Hình 2.8

Theo định lí Pitago ta có:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 1 + x^2 \Rightarrow DE = \sqrt{1+x^2}$

$BD^2 = DC^2 + BC^2 = 4x^2 + 1 \Rightarrow BD = \sqrt{4x^2+1}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác BDE ta có

$$\cos BDE = \frac{DE^2 + DB^2 - EB^2}{2DE.DB} \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4x^2+2}{2\sqrt{\left(1+x^2\right)\left(4x^2+1\right)}}$$

$\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (Do $x > 0$)

Vậy độ dài cạnh AB là $\sqrt{2}$

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.56: Cho tam giác ABC có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $ACB = 60^0$. Tính cạnh BC.

Bài 2.57: Cho tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1$. Trên tia đối của AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Giả sử $CBD = 30^0$. Tính AC.

Bài 2.58. Cho $a = x^2 + x + 1; b = 2x + 1; c = x^2 - 1$. Giả sử a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó có một góc bằng 120^0

Bài 2.59: Cho tam giác ABC có $AB = 3,\ AC = 7,\ BC = 8$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác

c) Tính đường đường cao kẻ từ đỉnh A.

Bài 2.60: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\dfrac{a}{\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{2}} = \dfrac{2c}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

a) Tính các góc của tam giác.

b) Cho $a = 2\sqrt{3}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.61: Cho tam giác ABC có $A = 60^0,\ a = 10,\ r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính R

b) Tính b, c

Bài 2.62: Cho tam giác ABC có $AB = 10$, $AC = 4$ và $A = 60^0$.

a) Tính chu vi của tam giác

b) Tính $\tan C$

c) Lấy điểm D trên tia đối của tia AB sao cho $AD = 6$ và điểm E trên tia AC sao cho $AE = x$. Tìm x để BE là tiếp tuyến của đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ADE

Bài 2.63. Cho tam giác ABC cân có cạnh bên bằng b và nội tiếp đường tròn (O;R).

a) Tính côsin của các góc tam giác.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

c) Với giá trị nào của b thì tam giác có diện tích lớn nhất ?

DẠNG 2: Giải tam giác.

1. Phương pháp.

- Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.
- Trong các bài toán giải tam giác người ta thường cho tam giác với ba yếu tố như sau : biết một cạnh và hai

góc kề cạnh đó; biết một góc và hai cạnh kề góc đó; biết ba cạnh.

Để tìm các yếu tố còn lại ta sử dụng định lí côsin và định lí sin ; định lí tổng ba góc trong một tam giác bằng 180^0 và trong một tam giác đối diện với góc lớn hơn thì có cạnh lớn hơn và ngược lại đối diện với cạnh lớn hơn thì có góc lớn hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Giải tam giác ABC biết $b = 32$; $c = 45$ và $A = 87^0$.

Lời giải

Theo định lí côsin ta có

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 32^2 + 4^2 - 2.32.4.\sin 87^0$$

Suy ra $a \approx 53,8$

Theo định lí sin ta có

$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{32\sin 87^0}{53,8} \Rightarrow B \approx 36^0$

Suy ra $C = 180^0 - A - B \approx 180^0 - 87^0 - 36^0 = 57^0$

Ví dụ 2: Giải tam giác ABC biết $A = 60^0,\ B = 40^0$ và $c = 14$.

Lời giải

Ta có $C = 180^0 - A - B = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Theo định lí sin ta có

$a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 60^0}{\sin 80^0} \Rightarrow a \approx 12,3$

$b = \dfrac{c\sin B}{\sin C} = \dfrac{14.\sin 40^0}{\sin 80^0} \Rightarrow b \approx 9,1$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC biết $a = 2\sqrt{3},\ b = 2\sqrt{2},\ c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Tính góc lớn nhất của tam giác.

Lời giải

Theo giải thiết ta có $c < b < a$ suy ra $C < B < A$ do đó góc A là lớn nhất.

Theo định lí côsin ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12^2}{2.2\sqrt{2}.\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = \frac{4 - 4\sqrt{3}}{8\sqrt{3} - 8} = -\frac{1}{2}$$

Suy ra $A = 120^0$

Vậy góc lớn nhất là góc A có số đo là 120^0.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 2.64: Giải tam giác ABC biết

a) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$.

b) $a = 12;\ c = 8,2$ và $A = 110^0$.

Bài 2.65: Giải tam giác ABC, biết:

a) $a = 109$; $B = 33^0 24'$; $C = 66^0 59'$

b) $a = 20$; $b = 13$; $A = 67^0 23'$

Bài 2.66: Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 4,5$; $A = 30^0$; $C = 75^0$

b) $b = 14$; $c = 10$; $A = 145^0$

c) $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$

Bài 2.67: Cho ΔABC ta có $a = 13$, $b = 4$ và $\cos C = -\frac{5}{13}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác.

✍ DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức liên quan đến các yếu tố của tam giác, tứ giác.

1. Phương pháp giải.

- Để chứng minh đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản để biến đổi vế này thành vế kia, hai vế cùng bằng một vế hoặc biến đổi tương đương về một đẳng thức đúng.
- Để chứng minh bất đẳng thức ta sử dụng các hệ thức cơ bản, bất đẳng thức cạnh trong tam giác và bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, bunhiacôpxki,…)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A = \sin B.\sin C$. Chứng minh rằng

a) $a^2 = bc$

b) $\cos A \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

a) Áp dụng định lí sin ta có $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$, $\sin C = \frac{c}{2R}$

Suy ra $\sin^2 A = \sin B.\sin C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} \Leftrightarrow a^2 = bc$ đpcm

b) Áp dụng định lí côsin và câu a) ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - bc}{2bc} \geq \frac{2bc - bc}{2bc} = \frac{1}{2} \text{ đpcm}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$

b) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

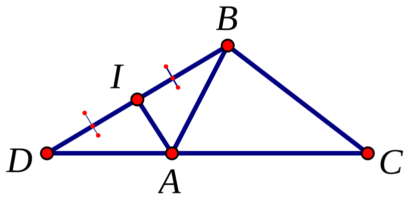
Lời giải (hình 2.9)

a) Trên tia đối của tia AC lấy D thỏa $AD = AB = c$ suy ra tam giác BDA cân tại A và $BDA = \frac{1}{2}A$.

Áp dụng định lý hàm số Côsin cho ΔABD, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD \\ &= 2c^2 - 2c^2.\cos(180^0 - A) \\ &= 2c^2(1+\cos A) = 2c^2(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) \\ &= \frac{c}{b}(a+b+c)(b+c-a) = \frac{4c}{b}p(p-a) \end{aligned}$$

Suy ra $BD = 2\sqrt{\frac{cp(p}{}}$



Hình 2.9

Gọi I là trung điểm của BD suy ra $AI \perp BD$.

Trong tam giác ADI vuông tại I, ta có

$$\cos\frac{A}{2} = \cos ADI = \frac{DI}{AD} = \frac{BD}{2c} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Vậy $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

b) Từ định lý hàm số sin, ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}$ (1)

Theo câu a) ta có $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, tương tự thì $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ và $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

kết hợp với công thức $S = \sqrt{p\quad p-a\quad p-b\quad p-c} = \frac{abc}{4R}$

Suy ra $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

$= \frac{4p}{abc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{4pS}{abc} = \frac{p}{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

Nhận xét: Từ câu a) và hệ thức lượng giác cơ bản ta suy ra được các công thức

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\ \cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC, chứng minh rằng:

a) $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$

b) $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

Lời giải:

a) Áp dụng định lí côsin và công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ ta có:

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} \quad \text{đpcm}$$

b) Theo câu a) tương tự ta có $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4S}$, $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

Suy ra $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{3p-a-b-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Mặt khác $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow S \leq \sqrt{p\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$

Ta có $p^2 = \frac{(a+b+c)^2}{4} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}$ suy ra $S \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$

Do đó $\cot A+\cot B+\cot C\geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4.\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}}=\sqrt{3}$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2+c^2=5a^2$.

Lời giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi tam giác GBC vuông tại G

$$\Leftrightarrow GB^2+GC^2=BC^2\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2=a^2\ (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến ta có

$$m_b^2=\frac{2(a^2+c^2)-b^2}{4},\ m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\dfrac{4}{9}\left(m_b^2+m_c^2\right)=a^2$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{9}\left[\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}+\frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}\right]=a^2\Leftrightarrow 4a^2+b^2+c^2=9a^2\Leftrightarrow b^2+c^2=5a^2\quad\text{(đpcm)}$$

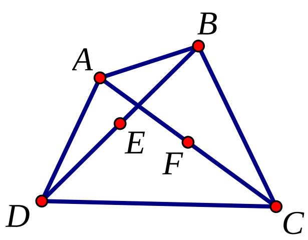
Ví dụ 5: Cho tứ giác ABCD có E, F là trung điểm các đường chéo. Chứng minh :
$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$

Lời giải (hình 2.10)

Áp dụng công thức đường trung tuyến với tam giác ABC và ADC ta có:

$$AB^2+BC^2=2BE^2+\frac{AC^2}{2}\ (1)$$

$$CD^2+DA^2=2DE^2+\frac{AC^2}{2}\ (2)$$



Hình 2.10

Từ (1) và (2) suy ra

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(BE^2+DE^2\right)+AC^2$$

Mặt khác EF là đường trung tuyến tam giác BDF nên $BE^2+DE^2=2EF^2+\dfrac{BD^2}{2}$

Suy ra $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$

✍ DẠNG 4: Nhận dạng tam giác

1. Phương pháp giải.

Sử dụng định lí côsin; sin; công thức đường trung tuyến; công thức tính diện tích tam giác để biến đổi giả thiết về hệ thức liên hệ cạnh(hoặc góc) từ đó suy ra dạng của tam giác.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin C = 2\sin B\cos A$. Chứng minh minh rằng tam giác ABC cân .

Lời giải

Áp dụng định lí côsin và sin ta có:

$$\sin C = 2\sin B\cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2.\frac{b}{2R}.\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

Ta có: $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R}(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}) = \frac{b + c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0 \Leftrightarrow (b + c)(b^2 + c^2) - a^2(b + c) = 0\ b^2 + c^2 = a^2 \Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Ví dụ 3: Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a.\sin A + b\sin B + c\sin C = h_a + h_b + h_c$

b) $\dfrac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \dfrac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$a.\sin A+b\sin B+c\sin C=h_a+h_b+h_c \Leftrightarrow a.\frac{2S}{bc}+b.\frac{2S}{ca}+c.\frac{2S}{ab}=\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Leftrightarrow a=b=c$

Vậy tam giác ABC đều

b) Ta có: $\frac{\cos^2 A+\cos^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot^2 A+\cot^2 B)$

$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A+\cos^2 B+\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\cot^2 A+1+\cot^2 B+1)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A+\sin^2 B}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}) \Leftrightarrow (\sin^2 A+\sin^2 B)^2=4\sin^2 A\sin^2 B$

$\Leftrightarrow \sin^2 A=\sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow \Delta ABC$ cân tại C.

Dạng 5: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ BIỂU THỨC HÌNH HỌC.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các bất đẳng thức

- Cho $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì. Khi đó ta có

+ $\vec{a}.\vec{b}\le\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos(\vec{a},\vec{b})=1$ hay $\vec{a};\vec{b}$ cùng hướng.

+ $\vec{a}.\vec{b}\ge-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1$ hay $\vec{a};\vec{b}$ ngược hướng.

- $\vec{u}^2\ge 0$ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=\vec{0}$
- Bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopxki...)

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và M là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng
$MA^2+MB^2+MC^2\ge MA.GA+MB.GB+MC.GC\ge GA^2+GB^2+GC^2$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MG} = MA.MG.\cos\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MG}\right) \le MA.MG$

Tương tự $MB.GB \ge \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB};\ MC.GC \ge \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Suy ra $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC}$

Mặt khác

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{GC} = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)\overrightarrow{GA} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right).\overrightarrow{GB} + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right).\overrightarrow{GC}$$

$$= \overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$$

Suy ra $MA.GA + MB.GB + MC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$ (*)

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ge 2MA.GA + 2MB.GB + 2MC.GC$$

Kết hợp (*) suy ra

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC + GA^2 + GB^2 + GC^2$ hay

$MA^2 + MB^2 + MC^2 \ge MA.GA + MB.GB + MC.GC$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:

- Ta có $GA = \frac{2}{3}m_a,\ GB = \frac{2}{3}m_b,\ GC = \frac{2}{3}m_c$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Suy ra với mọi điểm M thì

$$m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC \ge \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

$$3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \ge a^2 + b^2 + c^2$$

$$3\left(MA^2 + MB^2 + MC^2\right) \ge 2\left(m_a.MA + m_b.MB + m_c.MC\right)$$

Đặc biệt

- Với $M \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, ta có

$OA^2 + OB^2 + OC^2 \ge OA.GA + OB.GB + OC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$

Mặt khác ta có $OA = OB = OC = R$, ta có

$$R\ \ GA + GB + GC\ \ \le 3R^2 \text{ hay } m_a + m_b + m_c \le \frac{9}{2}R \text{ suy ra } \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \ge \frac{2}{R}$$

$$R\ \ GA + GB + GC\ \ \ge GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ hay } \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{m_a + m_b + m_c} \le \frac{3R}{2}$$

$$3R^2 \ge GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ hay } m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \le \frac{27}{4}R^2\ ,\ 9R^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$$

- Với $M \equiv I$ tâm đường tròn nội tiếp tam giác, ta có
  $IA.GA + IB.GB + IC.GC \ge GA^2 + GB^2 + GC^2$

Mặt khác $IA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}, IB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}, IC = \dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$ do đó ta có

$$\frac{m_a}{\sin\dfrac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\dfrac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\dfrac{C}{2}} \ge \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2r}$$

- Với $M \equiv H$ ta được $3\ \ HA^2 + HB^2 + HC^2\ \ \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Xét tam giác ABC nhọn khi đó ta có

$$HC = \frac{CA'}{\sin CHA'} = \frac{CA'}{\sin B} = \frac{AC.\cos C}{\sin B} = 2R\cos C.$$

Tương tự ta cũng có: HB = 2RcosB, HC = 2RcosC

Do đó $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \ge \left(\dfrac{p}{3R}\right)^2$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC và điểm M bất kỳ. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \ge \frac{a+b+c}{2}$$

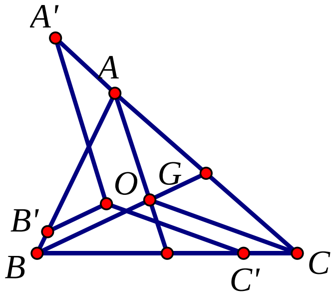
Lời giải (2.13)

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Ta có $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{\cos\dfrac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \dfrac{\cos\dfrac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \dfrac{\cos\dfrac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Vì $\cos\frac{A}{2}.MA = \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.MA.IA \geq \frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA}$, tương tự ta có

$\cos\frac{B}{2}.MB \geq \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB}$ và $\cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$



Hình 2.13

Mà $\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}.\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}.\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{IC}$

$= \overrightarrow{MI}\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{IA}\overrightarrow{IA} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{IB}\overrightarrow{IB} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{IC}\overrightarrow{IC}\right) + \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC$

$= \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC = AE + BF + CD = \frac{a+b+c}{2}$

Do đó $\cos\frac{A}{2}.MA + \cos\frac{B}{2}.MB + \cos\frac{C}{2}.MC \geq \frac{a+b+c}{2}$

Tổng quát

Cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ ($n \geq 3$) ngoại tiếp đường tròn tâm J. Chứng minh rằng với điểm M bất kỳ thì

$\sum_{i=1}^{n} \cos\frac{A_i}{2}.\ MA_i - JA_i \ \geq 0$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC với G là trọng tâm. Qua điểm O bất kỳ nằm trong tam giác kẻ đường thẳng song song với GA, GB, GC tương ứng cắt CA, AB, BC tại các điểm A', B', C'.

Xác định vị trí điểm M để $m_aMA' + m_bMB' + m_cMC'$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Ta có $m_a.MA' = \frac{3}{2}GA.MA' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GA}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'}$

Tương tự $m_b.MB' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GB}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB'}$, $m_c.MC' \geq \frac{3}{2}\overrightarrow{GC}.\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC'}$

Suy ra $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC' \geq \frac{3}{2}\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\ + \frac{3}{2}\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{OC'}$

Hay $m_a.MA' + m_b.MB' + m_c.MC' \geq m_aOA' + m_bOB' + m_cOC'$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M trùng với O.

Vậy với M trùng với O thì $m_a MA' + m_b MB' + m_c MC'$ đạt giá trị chỏ nhất.

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC và và ba số thực $x,\ y,\ z$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2 \ge 2yz\cos A + 2zx\cos B + 2xy\cos C$

Lời giải

Gọi $\ I;r\ $ là đường tròn nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P.

Khi đó $\ x.\overrightarrow{IM}+y.\overrightarrow{IN}+z.\overrightarrow{IP}\ ^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2.IM^2+y^2.IN^2+z^2.IP^2+2xy\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IN}+2yz\overrightarrow{IN}.\overrightarrow{IP}+2zx\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IM} \ge 0$

$\Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2\ \ r^2+2r^2\ \ xy\cos\ 180^0-C\ +yz\cos\ 180^0-A\ +zx\cos\ 180^0-B\ \ \ge 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \ge 2yz\cos A+2zx\cos B+2xy\cos C$ đpcm.

Nhận xét:

+ Khi chọn $x=y=z=1$ ta có: $\cos A+\cos B+\cos C \le \dfrac{3}{2}$.

+ Khi chọn $y=z=1$ ta có $\cos A + x\ \ \cos B+\cos C\ \ \le 1+\dfrac{1}{2}x^2$